Estrategias evolutivas sobre grafos

Rafael Montoya Robledo

July 20, 2016

Overview

- Nos basamos en el paper de Martin Nowak de la revista Nature.
- Se juntan teoría de juegos y sistemas dinámicos.
- En un contexto muy biológico que es aplicable a comunidades en general e incluso a política.
- Cuentas algebraicamente molestas y aproximaciones un poco ligeras.

La ecuación reversa de Kolmogorov

- Dadas dos estrategias A_1 y A_2, la probabilidad de fijación $\phi(p, x; t)$ es la densidad de la que la frecuencia de jugadores con la estrategia A_1 sea x en el tiempo t dado que empezó con frecuencia p.
- La ecuación de Kolmogorov hacia atrás está dada por

$$\frac{\partial \phi(p, x; t)}{\partial t} = \frac{1}{2} V_{\delta t} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \phi(p, x; t) + M_{\delta t} \frac{\partial}{\partial p} \phi(p, x; t) \tag{1}$$

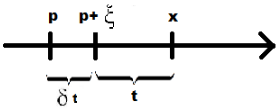
Donde M y V son respectivamente la media y la varianza del cambio en la frecuencia por unidad de tiempo.

Deducción

- $g(p, \xi; \delta t)$ es la densidad de probabilidad de que la frecuencia de la estrategia A_1 pase de x a $x + \xi$ durante un intervalo de tiempo que mide δt.
- Bajo esta notación se tiene que

$$\phi(p, x; t + \delta t) = \int g(p, \xi; \delta t)\phi(p + \xi, x, ; t)d\xi \tag{2}$$

- La siguiente figura ilustra lo que la integral hace:



- Haciendo el desarrollo en expansión de Taylor de ϕ en la primera componente, reorganizando, ignorando los terminos de la expansión de orden superior a 3 y usando el hecho de que $\int g = 1$ por ser densidad se obtiene que:

$$\phi(p,x;t+\delta t) - \phi(p,x;t) = \int g\xi \frac{\partial(\phi)}{\partial p} + g\frac{\xi^2}{2!}\frac{\partial^2(\phi)}{\partial p^2}$$

donde $g = g(p,\xi;\delta t)$ y $\phi = \phi(p,x;t)$.

- Ahora se dividen ambos lados por δt y haciendo $\delta t \longrightarrow 0$ se obtiene que

$$\frac{\partial \phi(p,x;t)}{\partial t} = \frac{V(p)}{2}\frac{\partial^2 \phi(p,x;t)}{\partial p^2} + M(p)\frac{\partial \phi(p,x;t)}{\partial p}$$

donde

$$M(p) = \lim_{\delta t \to 0} \frac{1}{\delta t}\int \xi g(p,\xi;\delta t) d\xi$$

y

$$V(p) = \lim_{\delta t \to 0} \frac{1}{\delta t}\int \xi^2 g(p,\xi;\delta t) d\xi$$

- Ahora, sustiuimos $M(p)$ y $V(p)$ por la media y la varianza del cambio por unidad de tiempo respectivamente, y se obtiene la ecuación de Kolmogorov.
- Nos interesa el problema de fijación de una estrategia que ocurre cuando $x = 1$.
- Definimos $u(p,t) := \phi(p,1,t)$ que es la probabilidad de fijacin en el tiempo t. Note que $u(0,t) = 0$ y $u(1,t) = 1$. Además

$$\frac{\partial u(p,t)}{\partial t} = \frac{V_{\delta t}}{2} \frac{\partial^2 u(p,t)}{\partial p^2} + M_{\delta t} \frac{\partial u(p,t)}{\partial p}.$$

- Ahora definimos la probabilidad terminal de fijación

$$u(p) = \lim_{t \to \infty} u(p,t).$$

- Asumiendo que este limite converge y que la probabilidad terminal de fijación se estabiliza, obtenemos que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

La ecuación

De lo anterior se deduce la siguiente ecuacún que será de vital importancia más adelante

$$0 = \frac{V_{\delta t}}{2} \frac{d^2 u(p)}{dp^2} + M_{\delta t} \frac{du(p)}{dp} \tag{3}$$

con condiciones de frontera $u(0) = 0$ y $u(1) = 1$.

Sistemas con dinámicas lentas y rápidas

- Cuando un sistema dinámico se puede escribir como

$$\dot{x} = f(x, y) \tag{4}$$
$$\dot{y} = \epsilon g(x, y) \tag{5}$$

  con $x \in \mathbb{R}^n$ y $y \in \mathbb{R}^m$, y ϵ es pequeño se dice que $x = (x_1, ..., x_n)$ son variables de **dinámica rápida**, mientras que $y = (y_1, ..., y_m)$ se llaman variables de **dinámica lenta**.
- Es importante notar que como ϵ es pequeño entonces

$$|\dot{y}| << |\dot{x}|.$$

- Esto hace que la convergencia de y sea mucho más lenta, permitiendo asumir que $f(x, y) = 0$. Esto puede permitir escribir todo el sistema solo en términos de y.

- Es importante ver que si tomamos $\tau = \epsilon t$, el sistema (**??**) se puede escribir como

$$\epsilon \frac{dx}{d\tau} = f(x, y) \tag{6}$$

$$\frac{dy}{d\tau} = g(x, y). \tag{7}$$

Contexto del juego

- Consideremos un juego entre estrategias A y B, con matriz de pagos

$$\begin{array}{ccc} & A & B \\ A & a & b \\ B & c & d \end{array}$$

- Supongamos que la población de jugadores es de tamaño N y se distribuye sobre los vertices de un grafo de orden k.
- Con unidades de tiempo y reglas de actualización el grafo va a ir evolucionando en torno a las distintas estrategias que van a ir ocupando los distintos nodos.

- Sean p_A y p_B las frecuencias de A y B respectivamente.
- Sean p_{AA}, p_{BB}, p_{AB}, y p_{BA} las frecuencias de las parejas AA, BB, AB y BA respectivamente. Estas probabilidades están dadas sobre las arístas del grafo. Es decir, p_{XY} representa la frecuencia de aristas que une nodos tipo$-X$ a nodos tipo$-Y$.
- Sea $q_{X|Y}$ la probabilidad condicional de que haya un tipo$-X$ en un nodo dado que ese nodo tiene un vecino tipo$-Y$. donde X y Y representan estrategias A o B.
- Se tienen las siguientes identidades:

$$p_A + p_B = 1 \tag{8}$$

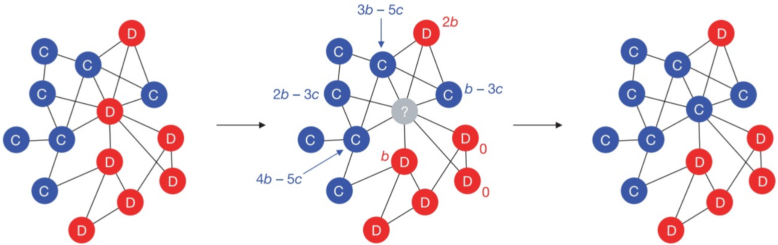
$$q_{A|X} + q_{B|X} = 1 \tag{9}$$

$$p_{XY} = q_{X|Y} p_Y \tag{10}$$

$$p_{AB} = p_{BA} \tag{11}$$

- Lo anterior implica que todo el sistema se puede escribir en términos de p_A y $q_{A|A}$.

Actualización DB



- Bajo esta regla de actualización, en cada unidad de tiempo, un individuo es eliminado al azar y luego, los vecinos de este individuo compiten por imponerle su estrategia al nodo. Esta competencia se hace porporcional al *fitness.*
- Suponga que, al azar, un tipo$-B$. Esto sucede con probabilidad p_B. Ahora, sus k vecinos compiten por el nodo.
- Escribamos $k = k_A + k_B$ donde k_A y k_B son la cantidad de vecinos A y B respectivamente. La frecuencia de esta configuración (que un nodo tipo$-B$ tenga k_A vecinos tipo$-A$ y k_B vecinos tipo$-B$) está dada por:

$$\left(\frac{k!}{k_A!k_B!}\right) q_{A|B}^{k_A} q_{B|B}^{k_B}.$$

- Por otro lado, el *fitness* de un jugador en este caso está dado por

$$
\begin{aligned}
f_A &= (1-w) + w\left[(k-1)q_{A|A}a + ((k-1)q_{B|A}+1)b\right] && (12)\\
&= 1 + w\underbrace{\left[(k-1)q_{A|A}a + ((k-1)q_{B|A}+1)b - 1\right]}_{:=\bigstar_A} && (13)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_B &= (1-w) + w\left[(k-1)q_{A|B}c + ((k-1)q_{B|B}+1)d\right] && (14)\\
&= 1 + w\underbrace{\left[(k-1)q_{A|B}c + ((k-1)q_{B|B}+1)d - 1\right]}_{:=\bigstar_B} && (15)
\end{aligned}
$$

- Aquí el parámetro $w \in [0,1]$ representa la intensidad de la selección.

- La probabilidad de que uno de los vecinos tipo$-A$ tome la vacante está dada por
$$\frac{k_A f_A}{k_A f_A + k_B f_B}.$$
que es proporcional al *fitness*.
- Sea Δp_A la v.a. que describe el cambio en la frecuencia en una unidad de tiempo. Entonces:
$$P(\Delta p_A = \frac{1}{N}) = p_B \sum_{k_A + k_B = k} \left(\frac{k!}{k_A! k_B!} \right) q_{A|B}^{k_A} q_{B|B}^{k_B} \frac{k_A f_A}{k_A f_A + k_B f_B}.$$

- En este caso el número de pares AA aumenta k_A y por lo tanto p_{AA} aumenta $\frac{2k_A}{kN} = \frac{k_A}{\underbrace{(\frac{kN}{2})}_{cantidad\ de\ aristas}}$ con probabilidad:

$$P(\Delta p_{AA} = \frac{2k_A}{kN}) = p_B \left(\frac{k!}{k_A! k_B!} \right) q_{A|B}^{k_A} q_{B|B}^{k_B} \frac{k_A f_A}{k_A f_A + k_B f_B}. \qquad (16)$$

- Sí en vez de eliminar a un tipo$-B$ se elimina a un tipo$-A$, se tiene que el *fitness* está dado por

$$g_A = (1-w) + w\left[((k-1)q_{A|A}+1)a + ((k-1)q_{B|A})b\right] \tag{17}$$

$$g_B = (1-w) + w\left[((k-1)q_{A|B}+1)c + ((k-1)q_{B|B})d\right] \tag{18}$$

- Se tiene también que la probabilidad de que un tipo$-B$ tome la vacante es

$$\frac{k_B g_B}{k_A g_A + k_B g_B}.$$

- En este caso se obtiene que

$$P(\Delta p_A = -\frac{1}{N}) = p_A \sum_{k_A+k_B=k} \left(\frac{k!}{k_A!k_B!}\right) q_{A|A}^{k_A} q_{B|A}^{k_B} \frac{k_B g_B}{k_A g_A + k_B g_B}. \tag{19}$$

- Similarmente se obtiene que

$$P(\Delta p_{AA} = -\frac{2k_A}{kN}) = p_A \left(\frac{k!}{k_A! k_B!} \right) q_{A|A}^{k_A} q_{B|A}^{k_B} \frac{k_B g_B}{k_A g_A + k_B g_B}. \qquad (20)$$

- $$\dot{p}_A = \frac{1}{N}P(\Delta p_A = \frac{1}{N}) - \frac{1}{N}P(\Delta p_A = -\frac{1}{N}) \tag{21}$$
$$= w\frac{k-1}{N}p_{AB}(I_a a + I_b b - I_c c - I_d d) + O(w^2). \tag{22}$$

Donde

$$I_a = \frac{k-1}{k}q_{A|A}(q_{A|A} + q_{B|B}) + \frac{1}{k}q_{A|A}) \tag{23}$$
$$I_b = \frac{k-1}{k}q_{B|A}(q_{A|A} + q_{B|B}) + \frac{1}{k}q_{B|B}) \tag{24}$$
$$I_c = \frac{k-1}{k}q_{A|B}(q_{A|A} + q_{B|B}) + \frac{1}{k}q_{A|A}) \tag{25}$$
$$I_d = \frac{k-1}{k}q_{B|B}(q_{A|A} + q_{B|B}) + \frac{1}{k}q_{B|B}). \tag{26}$$

- Para los pares se obtiene que

$$\dot{p_{AA}} = \frac{2}{kN} p_{AB} \left[1 + (k-1)(q_{A|B} - q_{A|A}) \right] + O(w). \tag{27}$$

- Entonces para $q_{A|A}$ se tiene que

$$\dot{q_{A|A}} = \frac{2}{kN} \frac{p_{AB}}{p_A} \left[1 + (k-1)(q_{A|B} - q_{A|A}) \right] + O(w).$$

- Como el sistema se puede describir en términos de p_A y $q_{A|A}$, los anteriores resultados se pueden escribir como

$$\dot{p_A} = wF_1(p_A, q_{A|A}) + O(w^2) \tag{28}$$

$$\dot{q_{A|A}} = F_2(p_A, q_{A|A}) + O(w). \tag{29}$$

- Como el sistema se puede describir en términos de p_A y $q_{A|A}$, los anteriores resultados se pueden escribir como

$$\dot{p_A} = wF_1(p_A, q_{A|A}) + O(w^2) \tag{30}$$

$$\dot{q_{A|A}} = F_2(p_A, q_{A|A}) + O(w). \tag{31}$$

- Para w muy pequeño estamos en un problema de dinámica lenta y rápida. Luego podemos suponer que la relación $F_2(p_A, q_{A|A}) = 0$.
- Esto nos sitúa en la variedad donde se cumple la identidad

$$q_{A|A} = p_A + \frac{1}{k-1}(1 - p_A).$$

- Con esta identidad, todo el sistema se puede describir en términos de una sola variable (p_A).

- Ahora se puede calcular y aproximar la media y la varianza del cambio por unidad de tiempo e introducirlos a la ecuación reversa de Kolmogorov.

$$\mathbb{E}(\Delta p_A) \approx w \frac{k-2}{k(k-1)N} p_A(1-p_A)(\alpha p_A + \beta)\Delta t := m(p_A)\Delta t$$

$$Var(\Delta p_A) \approx \frac{2(k-2)}{N^2(k-1)} p_A(1-p_A)\Delta t := v(p_A)\Delta t$$

Donde

$$\alpha = (k+1)(k-2)(a-b-c+d)$$

y

$$\beta = (k+1)a + (k^2-k-1)b - c - (k^2-1)d.$$

- La probabilidad de fijación $\phi_A(y)$ de que un tipo$-A$ con frecuencia inicial $p_A(t=0)=y$ satisface la ecuación reversa de Kolmogorov :

$$0=\mathbb{E}(y)\frac{d}{dy}\phi_A(y)+\frac{Var(y)}{2}\frac{d^2}{dy^2}\phi_A(y) \tag{32}$$

Con

$$\mathbb{E}(y)=w\frac{k-2}{k(k-1)N}y(1-y)(\alpha y+\beta)+O(w^2)$$

$$Var(y)=\frac{2(k-2)}{N^2(k-1)}y(1-y)+O(w).$$

- Una solución aproximada para $\phi_A(y)$ es dada por

$$\phi_A(y) \approx y + w\frac{N}{6k}y(1-y)((\alpha+3\beta)+\alpha y). \qquad (33)$$

- Se quiere buscar condiciones sobre a, b, c y d para que $\rho_A := \phi_A(\frac{1}{N}) > \frac{1}{N}$.
- Para N grande, $\rho_A > \frac{1}{N} \iff \alpha + 3\beta > 0$ que es equivalente a

$$(k^2+2k+1)a + (2k^2-2k-1)b > (k^2-k+1)c + (2k^2+k-1)d.$$

- Ahora si consideramos el juego de cooperadores y defractores con la siguiente matriz de pagos

$$\begin{array}{ccc} & A & B \\ A & b-c & -c \\ B & b & 0 \end{array}$$

Se obtiene que $\rho_A > \frac{1}{N} \iff \frac{b}{c} > k$

Actualización IM

- Bajo esta regla de actualización, en cada unidad de tiempo, un individuo es escogido al azar y luego, este se compara con sus vecinos y decide o no cambiar su estrategia proporcional al pago.
- La diferencia fundamental con DB es que en este caso el pago que recibe el individuo al actualizar su estrategia también importa.
- El *fitness* de un jugator tipo B con k_A vecinos tipo A y k_B vecinos tipo B está dado por

$$f_0 = 1 - w + w(k_A c + k_B d).$$

La probabilidad de que este jugador tipo B adopte la estrategia A está dado por

$$\frac{k_A f_A}{k_A f_A + k_B f_B + f_0}.$$

- El *fitness* de un jugador tipo A está dado por

$$g_0 = 1 - w + w(k_A a + k_B b).$$

- Similarmente la probabilidad de que un jugador tipo A adopte la estrategia B es:

$$\frac{k_B g_B}{k_A g_A + k_B g_B + g_0}.$$

- Las cuentas van a ser muy similares al caso anterior teniendo en cuanta solo los cambios de la anterior diapositiva.
-
$$P(\Delta p_A = \frac{1}{N}) = p_B \sum_{k_A+k_B=k} \left(\frac{k!}{k_A!k_B!}\right) q_{A|B}^{k_A} q_{B|B}^{k_B} \frac{k_A f_A}{k_A f_A + k_B f_B + f_0}. \tag{34}$$

$$P(\Delta p_{AA} = \frac{2k_A}{kN}) = p_B \left(\frac{k!}{k_A!k_B!}\right) q_{A|B}^{k_A} q_{B|B}^{k_B} \frac{k_A f_A}{k_A f_A + k_B f_B + f_0}. \tag{35}$$

$$\dot{p_A} = \frac{k}{N(k+1)^2} p_{AB}(a((k-1)^2 q_{A|A}(q_{A|A} + q_{B|B}) + 3(k-1)q_{A|A})$$

$$+ b((k-1)^2 q_{B|A}(q_{A|A} + q_{B|B}) + (k-1)q_{B|B} + 2(k-1)q_{B|A} + 1)$$

$$- c((k-1)^2 q_{A|B}(q_{A|A} + q_{B|B}) + (k-1)q_{A|A} + 2(k-1)q_{A|B} + 1)$$

$$- d((k-1)^2 q_{B|B}(q_{A|A} + q_{B|B}) + 3(k-1)q_{B|B})) + O(w^2)$$

- $$\dot{p_{AA}} = \frac{2}{(k+1)N}\frac{p_{AB}}{p_A}\left(1+(k-1)(q_{A|B}-q_{A|A})\right)+O(w)$$

  $$\dot{q_{A|A}} = \frac{2}{(k+1)N}\frac{p_{AB}}{p_A}\left(1+(k-1)(q_{A|B}-q_{A|A})\right)+O(w)$$

- Suponiendo que $q_{A|A}$ se estabiliza mucho más rápido obtenemos la identidad

  $$q_{A|A} = p_A + \frac{1}{k-1}(1-p_A).$$

- Ahora se puede calcular y aproximar la media y la varianza del cambio por unidad de tiempo e introducirlos a la ecuación reversa de Kolmogorov.

$$\mathbb{E}(\Delta p_A) \approx w \frac{k-2}{k(k-1)N} p_A(1-p_A)(\alpha p_A + \beta)\Delta t := m(p_A)\Delta t$$

$$Var(\Delta p_A) \approx \frac{2(k-2)}{N^2(k-1)} p_A(1-p_A)\Delta t := v(p_A)\Delta t$$

Donde

$$\alpha = (k+3)(k-2)(a-b-c+d)$$

$$\beta = (k+3)a + (k^2+k-4)b - 2c - (k^2+2k-3)d.$$

- La probabilidad de fijación $\phi_A(y)$ de que un tipo$-A$ con frecuencia inicial $p_A(t=0)=y$ satisface la ecuación reversa de Kolmogorov :

$$0 = \mathbb{E}(y)\frac{d}{dy}\phi_A(y) + \frac{Var(y)}{2}\frac{d^2}{dy^2}\phi_A(y) \tag{36}$$

Con

$$\mathbb{E}(y) = w\frac{k-2}{k(k-1)N}y(1-y)(\alpha y+\beta) + O(w^2)$$

$$Var(y) = \frac{2(k-2)}{N^2(k-1)}y(1-y) + O(w).$$

- Una solución aproximada para $\phi_A(y)$ es dada por

$$\phi_A(y) \approx y + w\frac{N}{6k}y(1-y)((\alpha+3\beta)+\alpha y). \tag{37}$$

- Se quieren buscar condiciones sobre a, b, c y d para que $\rho_A := \phi_A(\frac{1}{N}) > \frac{1}{N}$.
- Para N grande, $\rho_A > \frac{1}{N} \iff \alpha + 3\beta > 0$ que es equivalente a

$$(k^2+4k+3)a + (2k^2+2k-3)b > (k^2+k+3)c + (2k^2+5k-3)d.$$

- Ahora si consideramos el juego de cooperadores y defractores con la siguiente matriz de pagos

$$\begin{array}{ccc} & A & B \\ A & b-c & -c \\ B & b & 0 \end{array}$$

Se obtiene que $\rho_A > \frac{1}{N} \iff \frac{b}{c} > k+2$

Actualización BD

- Bajo esta regla de actualización, en cada unidad de tiempo, un individuo es escogido para reproducirse proporcional al *fitness*. Luego, uno de sus vecinos es escogido al azar para ser remplazado por el recién nacido.
- La probabilidad de que un jugador tipo A con k_A vecinos tipo A y k_B vecinos tipo B sea seleccionado para reproducirse está dada por

$$\underbrace{\left[p_A \frac{k!}{k_A!k_B!} q_{A|A}^{k_A} q_{B|A}^{k_B}\right]}_{frecuencia\ de\ la\ configuracion} \underbrace{[1 - w + w(k_A a + k_B b).]}_{fitness\ del\ jugador\ tipo\ A}$$

- Si uno de los vecinos tipo B se escoge para ser elimindado (lo cual ocurre con probabilidad $\frac{k_B}{k}$) entonces p_A aumenta en 1 (o sea, Δp_A aumenta por $\frac{1}{N}$) y Δp_{AA} aumenta por $\frac{2(1+(k-1)q_{A|B})}{kN}$).

- As mismo, la probabilidad de que un jugador tipo B se escoja para reproducción está dada por

$$\left[p_B \frac{k!}{k_A! k_B!} q_{A|B}^{k_A} q_{B|B}^{k_B}\right] [1 - w + w(k_A c + k_B d)] .$$

- Si un vecino tipo A es remplazado (pasa con probabilidad $\frac{k_A}{k}$) entonces p_A disminuye por 1 y p_{AA} disminuye por $(k-1)q_{A|A}$.

$$P(\Delta p_A = \frac{1}{N}) = \sum_{k_A+k_B=k} p_A \frac{k!}{k_A!k_B!} q_{A|A}^{k_A} q_{B|A}^{k_B} \frac{k_B}{k} \left[1 + w(k_A a + k_B b - 1)\right]$$

$$P(\Delta p_A = -\frac{1}{N}) = \sum_{k_A+k_B=k} p_B \frac{k!}{k_A!k_B!} q_{A|B}^{k_A} q_{B|B}^{k_B} \frac{k_A}{k} \left[1 + w(k_A c + k_B d - 1)\right]$$

$$P(\Delta p_{AA} = \frac{2(1+(k-1)q_{A|B})}{kN})$$

$$= p_A \frac{k!}{k_A!k_B!} q_{A|A}^{k_A} q_{B|A}^{k_B} \frac{k_B}{k}(1 + w(k_A a + k_B b - 1)$$

$$P(\Delta p_{AA} = \frac{-2(k-1)q_{A|A})}{kN})$$

$$= p_B \frac{k!}{k_A!k_B!} q_{A|B}^{k_A} q_{B|B}^{k_B} \frac{k_A}{k}(1 + w(k_A c + k_B d - 1).$$

$$\dot{p_A} = \frac{wp_{AB}}{N}((k-1)q_{A|A}a + ((k-1)q_{B|A} + 1)b$$

$$-((k-1)q_{A|B} + 1)c - (k-1)q_{B|B}d) + O(w^2)$$

$$\dot{p_{AA}} = \frac{2}{kN}p_{AB}(1 + (k-1)(q_{A|B} - q_{A|A})) + O(w)$$

$$\dot{q_{A|A}} = \frac{2}{kN}\frac{p_{AB}}{p_A}(1 + (k-1)(q_{A|B} - q_{A|A})) + O(w)$$

- Ahora obtenemos aproximaciones para la media y la varianza

$$\mathbb{E}(\Delta p_A) = \underbrace{\frac{w}{N}\frac{k-2}{k-1}p_A(1-p_A)(\alpha p_A + \beta)}_{:=m(p_A)}$$

donde

$$\alpha = (k-2)(a-b-c+d)$$

y

$$\beta = a + (k-1)b - c - (k-1)d.$$

$$Var(\Delta p_A) = \underbrace{\frac{2}{N^2}\frac{k-2}{k-1}p_A(1-p_A)}_{:=v(p_A)}$$

- $$\phi_A(y) = y + w\frac{N}{6}y(1-y)((\alpha+3\beta)+\alpha y).$$

- Una solución aproximada para $\phi_A(y)$ es dada por

$$\phi_A(y) \approx y + w\frac{N}{6k}y(1-y)((\alpha+3\beta)+\alpha y). \qquad (38)$$

- Se quieren buscar condiciones sobre a, b, c y d para que $\rho_A := \phi_A(\frac{1}{N}) > \frac{1}{N}$.
- Para N grande, $\rho_A > \frac{1}{N} \iff \alpha + 3\beta > 0$ que es equivalente a

$$(k+1)a + (2k-1)b > (k+1)c + (2k-1)d.$$

- Ahora si consideramos el juego de cooperadores y defractores con la siguiente matriz de pagos

$$\begin{array}{ccc} & A & B \\ A & b-c & -c \\ B & b & 0 \end{array}$$

- Con estos valores se obtiene que $\rho_C > \frac{1}{N} > \rho_D$ solo para valores negativos de b o c, luego, $\rho_D > \frac{1}{N} > \rho_C$ para todo $b > c > 0$.
- La cooperación no es favorecida bajo la regla de actualización BD.

Resumen

Actualización DB

La cooperación es favorecida cuando $\frac{b}{c} > k$.

Actualización IM

La cooperación es favorecida cuando $\frac{b}{c} > k + 2$.

Actualización BD

La cooperación no es favorecida.

Notación

- Sean A_1, A_2 y A_3 alelos/estrategias. Sea $\phi(p_1, p_2, x_1, x_2, t + \delta t)$ la densidad de probabilidad de que la frecuencia A_1 se halle entre x_1 and $x_1 + dx_1$ y que la frecuencia de A_2 se halle entre x_2 y $x_2 + dx_2$ en el tiempo t; dado que la frecuencia inicial (en $t = 0$) de A_1 y A_2 sea p_1 y p_2 respectivamente.
- Sea $g(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2, t, \delta t)$ la densidad de probabilidad de que las frecuencias cambien de x_1 y x_2 a $x_1 + \xi_1$ y $x_2 + \xi_2$ respectivamente, en el intervalo de tiempo $(t, t + \delta t)$.
- Consideremos el caso cuando x_1 y x_2 son fijas y p_1 y p_2 son variables aleatorias.

- Primero tenemos que:

$$\phi(p_1, p_2, x_1, x_2, t+\delta t) = \int\int g(p_1, p_2, \xi_1, \xi_2, \delta t)\phi(p_1+\xi_1, p_2+\xi_2, x_1, x_2,$$

- Por Teorema de taylor tenemos que

$$\phi(p_1, p_2, x_1, x_2, t+\delta t)$$

$$= \int\int g(p_1, p_2, \xi_1, \xi_2, \delta t)\phi(p_1+\xi_1, p_2+\xi_2, x_1, x_2, t)d\xi_1 d\xi_2$$

$$= \int\int \{(g\phi) + g\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_2}\phi + g\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2}\phi$$

$$+ g\frac{\xi_1^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2}(\phi) + g\xi_1\xi_2\frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}(\phi) + g\frac{\xi_2^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2}(\phi) + O(\xi^3)\}d\xi_1 d\xi_2$$

- Como g es una densidad ($\int\int g = 1$) y suponiendo que la suma, la diferenciación y las integrales se pueden intercambiar libremente, obtenemos que:

$$\phi(p_1, p_2, x_1, x_2, t+\delta t) \approx \phi(p_1+\xi_1, p_2+\xi_2, x_1, x_2, t)+$$
$$\frac{\partial}{\partial \xi_1}(\phi)\int\int \xi_1 g d\xi_1 d\xi_2 + \frac{\partial}{\partial \xi_2}(\phi)\int\int \xi_2 g d\xi_1 d\xi_2$$
$$+\frac{1}{2}\{\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2}(\phi)\int\int \xi_1^2 g d\xi_1 d\xi_2 + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2}(\phi)\int\int \xi_2^2 g d\xi_1 d\xi_2\}+$$
$$\frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}(\phi)\int\int \xi_1\xi_2 g d\xi_1 d\xi_2.$$

- Luego, si restamos el primer término de la deracha y dividimos por δt se obtiene que:

$$\frac{\phi(p_1,p_2,x_1,x_2,t+\delta t)-\phi(p_1,p_2,x_1,x_2,t)}{\delta t}$$
$$approx \frac{\partial}{\partial \xi_1}(\frac{\phi}{\delta t})\int\int \xi_1 g d\xi_1 d\xi_2 + \frac{\partial}{\partial \xi_2}(\frac{\phi}{\delta t})\int\int \xi_2 g d\xi_1 d\xi_2$$
$$+\frac{1}{2}\{\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2}(\frac{\phi}{\delta t})\int\int \xi_1^2 g d\xi_1 d\xi_2 +$$
$$\frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2}(\frac{\phi}{\delta t})\int\int \xi_2^2 g d\xi_1 d\xi_2\} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}(\frac{\phi}{\delta t})\int\int \xi_1\xi_2 g d\xi_1 d\xi_2$$

- Ahora, dejando $\delta t \longrightarrow 0$ se obtiene que:

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(p_1+\xi_1, p_2+\xi_2, x_1, x_2, t) \approx \frac{\partial}{\partial \xi_1}(\phi)M_1 + \frac{\partial}{\partial \xi_2}(\phi)M_2$$
$$+\frac{1}{2}\{\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2}(\phi)V_{11} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2}(\phi)V_{22}\} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}(\phi)V_{12}$$

con

$$M_1(p_1, p_2, x_1, x_2) = \lim_{\delta t \longrightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \int \int \xi_1 g d\xi_1 d\xi_2$$
$$M_2(p_1, p_2, x_1, x_2) = \lim_{\delta t \longrightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \int \int \xi_2 g d\xi_1 d\xi_2$$
$$V_{11}(p_1, p_2, x_1, x_2) = \lim_{\delta t \longrightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \int \int \xi_1^2 g d\xi_1 d\xi_2$$
$$V_{22}(p_1, p_2, x_1, x_2) = \lim_{\delta t \longrightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \int \int \xi_2^2 g d\xi_1 d\xi_2$$
$$V_{12}(p_1, p_2, x_1, x_2) = \lim_{\delta t \longrightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \int \int \xi_1 \xi_2 g d\xi_1 d\xi_2$$

- Ahora, remplazamos M_1, M_2, V_{11}, V_{22} y V_{12} por $\mathbb{E}(X), \mathbb{E}(Y), Var(X), Var(Y)$ y $\mathbb{E}(XY)$ respectivamente, donde X y Y son los cambios en las frecuencias por unidad de tiempo.
- Se obtiene entonces la siguiente EPD:

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(p_1+\xi_1, p_2+\xi_2, x_1, x_2, t) = \mathbb{E}(X)\frac{\partial}{\partial \xi_1}(\phi) + \mathbb{E}(Y)\frac{\partial}{\partial \xi_2}(\phi)$$

$$+\frac{1}{2}\nabla^t Cov(X, Y)\nabla\phi$$

donde $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})^t$ y $Cov(X, Y)$ es la matriz de covarianza del vector aleatorio (X, Y).

- $u(p_1, p_2, t) := \phi(p_1, p_2, 1, 0, t)$ se puede interpretar como la probabilidad de fijación en el timepo t cuando la frecuencia inicial es (p_1, p_2). Entonces $u(p_1, p_2, t)$ satisface:

$$\frac{\partial u(p_1, p_2, t)}{\partial t} = \mathbb{E}(X)\frac{\partial}{\partial \xi_1}(u(p_1, p_2, t)) + \mathbb{E}(Y)\frac{\partial}{\partial \xi_2}(u(p_1, p_2, t))$$

$$+\frac{1}{2}\nabla^t Cov(X, Y)\nabla u(p_1, p_2, t)$$

- Imponemos las condiciones de frontera $u(1, 0, t) = 1, \; u(0, p_2, t) = 0$ que son propias del problema de fijación
- Ahora la probabilidad de fijación es dada por $u(p_1, p_2) = \lim_{t \longrightarrow \infty} u(p_1, p_2, t)$.
- Como en el caso de dos estrategias, $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$. Esto nos arroja la siguiente EDP:

$$0 = \mathbb{E}(X)\frac{\partial}{\partial \xi_1}(u(p_1, p_2)) + \mathbb{E}(Y)\frac{\partial}{\partial \xi_2}(u(p_1, p_2))$$

Que viene después...

- Ahora , si consideramos un juego sobre un Grafo de tamaño N y grado k con trés estrategias (A, B y C) y usando la misma notación que en el juego de dos estrategias obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} p_A + p_B + p_C &= 1 \\ q_{A|X} + q_{B|X} + q_{C|X} &= 1 \\ p_{XY} &= q_{X|Y} p_Y \\ p_{XY} &= p_{YX} \end{aligned}$$

- En este caso la matriz de pagos es:

$$\begin{array}{cccc} & A & B & C \\ A & a & b & c \\ B & d & e & f \\ C & g & h & i \end{array}.$$

- En este caso $p_C = 1 - p_A - p_B$. La idea acá es expresar todo el sistema en términos de p_A, p_B y de los $q_{X|Y}$.
- Utilizando las mismas ideas de dinámica rápida y lenta se va a buscar poner todo el sistema en términos de p_A y p_B. para buscar los valores esperados y la matriz de covarianza de los cambios de frecuencia por unidad de tiempo $(\mathbb{E}(\Delta p_A), \mathbb{E}(\Delta p_B), Var(\Delta p_A), Var(\Delta p_B)$ y $\mathbb{E}(\Delta p_A \Delta p_B)$ para remplazarlos en la EDP y poder estimar la probabilidad de fijación.

Bibliografía

Hopfbauer, J., and Sigmund,K.
Evolutionary Games and Population Dynamics
Cambridge University Press pp. 1-140. June 13, 1998.

Crow, J.F., Kimura, M.
An Introduction to Population Genetics Theory
Burgess Publishing Company pp 371-382, 1970.

Ohtsuki,H., Hauert,C., Lieberman, E. and Nowak,M.A.
A Simple Rule for the Evolution of Cooperation on graphs and Social Networks
nature Magazine Vol 441—25, pp 502-505, May 2006.

Perko, L.
Differential Equations and Dynamical Systems
Texts in Applied Mathematics 7, Third Edition, Springer pp 1-192, 1991.

Roubicek, T.,
Nonlinear Partial Differential Equations with Applications
Birkhauser Second Edition, 2005.